Ecuación barométrica

Sea $\phi = mgz$ y calculemos la fracción de moléculas que se encuentran entre z y $z + dz$ independientemente de su velocidad

$$\left(\iint f(\vec{r},\vec{v})d\vec{v}dxdy \right) dz = f(z)dz$$

$$= \frac{\iint dxdye^{-\frac{mgz}{kT}}}{\iint dxdydze^{-\frac{mgz}{kT}}}$$

$$f(z)dz = \frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{\int_0^\infty e^{-\frac{mgz}{kT}}}$$

para una columna de altura infinita. Entonces

$$f(z)dz = \frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{\frac{kT}{mg}}$$

$$= \frac{mg}{kT}e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

$$f(z_1)dz_1 = \frac{mg}{kT}e^{-\frac{mgz_1}{kT}}$$

$$f(z_2)dz_2 = \frac{mg}{kT}e^{-\frac{mgz_2}{kT}}$$

$$\frac{f(z_1)}{f(z_2)} = e^{-\frac{mg(z_1-z_2)}{kT}}$$ que es la famosa ley de Perrin

$f(z)dz$ es la fracción de moléculas entre z y $z + dz$, por lo tanto en una columna de área unitaria el número de moléculas a esta altura es, suponiendo que el gas es ideal,

$$f(z)dzn = n_z = \frac{p_z}{kT}$$

$$p(z) = nmge^{-\frac{mgz}{kT}} \quad ; \quad \text{para } z = 0 \;\; p(0) = nmg$$

$$p(z) = p(0)e^{-\frac{mgz}{kT}}$$ que es la llamada ley de las atmósferas.

Ejercicio:

Obtener esta ecuación a partir de los principios de la hidrostática suponiendo el aire como gas ideal. ¿Cuál es la distribución de velocidades en presencia de un campo gravitacional?

Formulación general del principio de equipartición de la energía

Todo grado de libertad cuya coordenada aparezca en forma cuadrática en la energía de una molécula, contribuye a la energía promedio de la misma en $\frac{1}{2}kT$.

Supongamos que,

$$\varepsilon\,(x,y,z,...,\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z,...) = a\xi^2 + \varepsilon\,(x,y,z,....)$$

donde ξ es alguna coordenada cuadrática en ε. Entonces

$$f(x,y,z,...,\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z,...)dxdydz.... = \frac{e^{\frac{-(a\xi^2+\varepsilon')}{kT}}dxdydz...}{\int dxdydz...\int d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z....e^{\frac{-(a\xi^2+\varepsilon')}{kT}}}$$

$$\overline{a\xi^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} a\xi^2 e^{-\frac{a\xi^2}{kT}}d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a\xi^2}{kT}}d\xi}$$

pues todos los demás términos desaparecen al integrar claramente,

$$\overline{a\xi^2} = kT^2\frac{d}{dT}\ln\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a\xi^2}{kT}}d\xi$$

$$= kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln T^{1/2}$$

$$\overline{a\xi^2} = \frac{kT}{2}$$

ya vimos que:

$$a\xi^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_x{}^2$$

$$\overline{a\xi^2} = \frac{1}{2}m\upsilon_x{}^2 = \frac{kT}{2}$$

$$\frac{1}{2}m\overline{\upsilon}_x{}^2 = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon}_y{}^2 = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon}_z{}^2 = \frac{kT}{2}$$