Ejercicio:

Obtener esta ecuación a partir de los principios de la hidrostática suponiendo el aire como gas ideal. ¿Cuál es la distribución de velocidades en presencia de un campo gravitacional?

Formulación general del principio de equipartición de la energía

Todo grado de libertad cuya coordenada aparezca en forma cuadrática en la energía de una molécula, contribuye a la energía promedio de la misma en $\frac{1}{2}kT$.

Supongamos que,

$$\varepsilon\,(x, y, z, ..., \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, ...) = a\xi^2 + \varepsilon\,(x, y, z, ...)$$

donde ξ es alguna coordenada cuadrática en ε. Entonces

$$f(x, y, z, ..., \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, ...)dxdydz.... = \frac{e^{\frac{-(a\xi^2+\varepsilon')}{kT}}dxdydz...}{\int dxdydz...\int d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z ....e^{\frac{-(a\xi^2+\varepsilon')}{kT}}}$$

$$\overline{a\xi^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} a\xi^2 e^{-\frac{a\xi^2}{kT}}d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a\xi^2}{kT}}d\xi}$$

pues todos los demás términos desaparecen al integrar claramente,

$$\overline{a\xi^2} = kT^2\frac{d}{dT}\ln\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a\xi^2}{kT}}d\xi$$

$$= kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln T^{1/2}$$

$$\overline{a\xi^2} = \frac{kT}{2}$$

ya vimos que:

$$a\xi^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_x{}^2$$

$$\overline{a\xi^2} = \frac{1}{2}m\upsilon_x{}^2 = \frac{kT}{2}$$

$$\frac{1}{2}m\overline{\upsilon}_x{}^2 = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon}_y{}^2 = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon}_z{}^2 = \frac{kT}{2}$$

$$\frac{1}{2}m\overline{v}^2 = \frac{3kT}{2}$$

En general, la energía media por molécula si esta posee f grados de libertad es:

$$\overline{w} = \frac{fkT}{2}$$

Recordando que $\nu = \dfrac{N}{N_0}$, entonces la energía interna total del sistema será:

$$\overline{U} = \frac{NfkT}{2}$$

$$= \nu \frac{N_0 kT}{2}$$

$$= \nu \frac{fRT}{2}$$

$$C_v = \nu \frac{fR}{2}$$

$$\boxed{C_v{}^* = \frac{fR}{2}}$$

$$C_p{}^* - C_v{}^* = R$$

$$C_p{}^* = \left(\frac{f}{2} + 1\right)R$$

$$= \left(\frac{f+2}{2}\right)R$$

$$\gamma = \frac{C_p{}^*}{C_v{}^*}$$

$$= \left(\frac{f+2}{2}\right)\frac{2}{f}$$

$$= \frac{f+2}{f}$$

$$= 1 + \frac{2}{f}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{2}{f} + 1}$$

Estos resultados establecen que una molécula tien un total de f grados de libertad de los cuales tres son traslacionales, así el principio de equipartición de la energía, dice que si la energía asociada con un grado de libertad es cuadrática con la variable correspondiente, ese grado de libertad contribuye a la energía media de la molécula por $\frac{1}{2}kT$. Ejemplos: rotación $\frac{1}{2}I\omega^2$, vibración $\frac{1}{2}kx^2$, etc. La energía media total de una molécula con f grados de libertad será:

$$\overline{\varpi} = \frac{1}{2} fkT \tag{47}$$

para el sistema $$N\overline{\varpi} = \frac{N}{2} fkT = \frac{f}{2} n_o RT$$

donde n_o es el número de moles en el sistema.

Teoría Clásica de los Calores Específicos

De acuerdo con (47), U es igual a la suma de energías individuales de una molécula multiplicada por N, por lo tanto:

$$U = \frac{N}{2} fkT = \frac{f}{2} \nu_o RT \tag{48}$$

es la energía interna de un gas compuesto por moléculas con f grados de libertad,

considere $u^* = \frac{U}{\nu_0}$, entonces: $$u^* = \frac{U}{\nu_o} = \frac{f}{2} RT$$

$$C_v^* = \left(\frac{\partial u^*}{\partial T} \right)_v = \frac{RT}{2} = \frac{f}{2} R \tag{49}$$

y para gases ideales: $$C_p^* = C_v^* + R = \left(\frac{f+2}{2} \right) R \tag{50}$$

$$\gamma = \frac{C_p^*}{C_v^*} = \frac{f+2}{2} \tag{51}$$