a (7) se le llama ecuación de sobrevivencia, es el número de moléculas de un grupo de N_0 moléculas que no han chocado después de recorrer una distancia x. Por otra parte, (8) tiene la misma interpretación que (5).

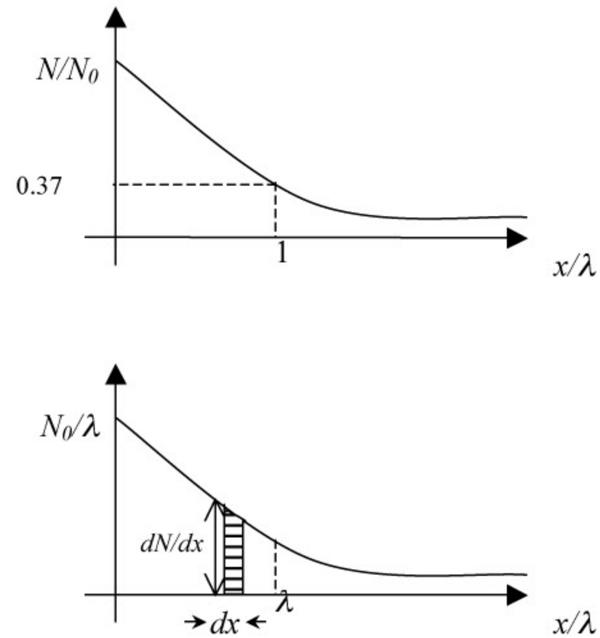

Figura 1.13. número de moléculas con trayectorias libres medias

Coeficiente de Viscosidad

Damos ahora una teoría molecular sobre el flujo de la cantidad de movimiento (ímpetu), por las moléculas del gas que cruzan una superficie imaginaria en el mismo. Este transporte da lugar a la viscosidad del gas. Por definición,

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{du}{dy} = \tau_{xy} \qquad (9)$$

donde $\frac{du}{dy}$ es el gradiente de velocidades en la dirección $\boldsymbol{y}$, A es el área del fluido sobre la que actúa F. Sea A la denotada por SS

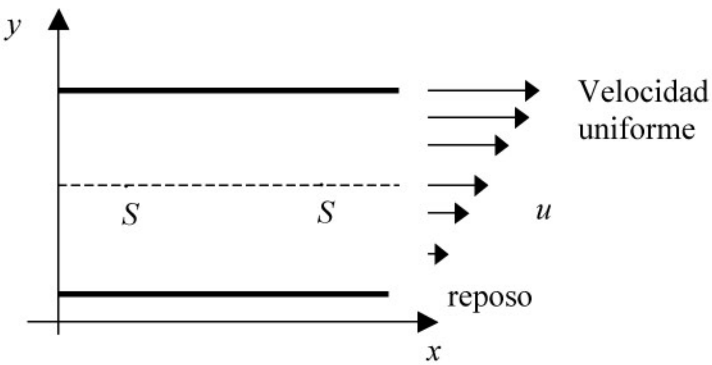

Figura 1.14. Perfil de velocidades

Sea υ la velocidad del gas en SS, y $\frac{du(x)}{dy}$ el gradiente de velocidad a esta altura. Supongamos que $\upsilon \ll \bar{\upsilon}$ para poder usar resultados de equilibrio ya demostrados

Suposiciones:

a) En su última colisión antes de cruzar SS la molécula adquiere una velocidad de arrastre hacia la derecha igual a la velocidad de flujo del lugar a donde chocó.

b) El transporte de moléculas de abajo hacia arriba de SS, (o viceversa) resulta en transporte de ($m\,\upsilon$) a través de la superficie y por la segunda ley de Newton, la rapidez de cambio en la cantidad de movimiento y por unidad de área es igual a la fuerza viscosa por unidad de área $$\tau_{xy} = \frac{F_{xy}}{dA}$$

Calculemos $\bar{y}$, la altura media arriba o debajo de *SS*, en la cual una molécula efectúa su última colisión antes de cruzar. Sea Z, la frecuencia de colisión de una molécula y n el número de moléculas por unidad de volumen. El número total de colisiones en *dV* en un tiempo *dt* es

$\frac{1}{2} zndVdt$ (½ ocurre para no contar una colisión dos veces).

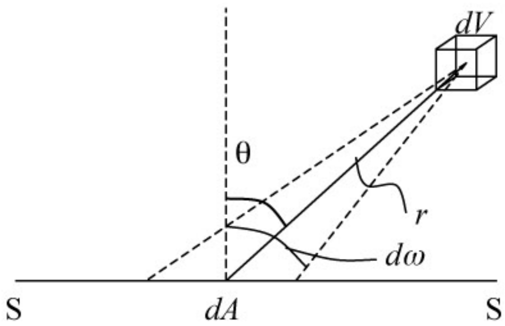

Figura 1.15. Número de trayectorias libres por elemento de volumen

En cada colisión se originan dos λ's nuevas por lo tanto el número de trayectorias libres originadas en dV es $zndVdt$. Estas trayectorias comienzan en todas direcciones luego el número que sale hacia dA será

$$\frac{dw}{4\pi}zndVdt \qquad \text{siendo} \qquad dw = \frac{\cos\theta}{r^2}dA$$

Por (7), el número de moléculas que llegan a dA sin chocar es $\frac{d\omega}{4\pi}zndVdte^{-r/\lambda}$ por lo que el número de moléculas que llegan de dV a dA sin chocar es

$$\frac{dA\cos\theta}{4\pi r^2}zndtr^2 sen\theta d\theta dr d\phi e^{-r/\lambda} = \frac{1}{4\pi}zndAdt\cos\theta sen\theta d\theta d\phi e^{-r/\lambda}dr \qquad (10)$$

y el número total que cruza dA en dt de todas las direcciones y distancias de dA será:

$$\mathrm{N} \equiv \frac{1}{4\pi}zndAdt\int_0^{\pi/2} sen\theta d(sen\theta)\cdot 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r/\lambda}dr = \frac{1}{4}zndAdt.\lambda$$

y como $z = \frac{\overline{\upsilon}}{\lambda}$

tenemos que

además $\frac{1}{4}\overline{\upsilon}ndAdt = \mathrm{N}$

Por lo tanto es el número de moléculas que cruzan SS por unidad de área y unidad de tiempo es $\frac{1}{4}n\overline{\upsilon}$, mismo resultado que sin colisiones.

La altura de dV sobre SS es $r\cos\theta$ por lo tanto la altura media para aquellas moléculas que cruzan SS sin chocar es el número de moléculas que llega a dA sin chocar por $r\cos\theta$ entre el número total que llegan a dA sin chocar, esto es:

$$\overline{y} = \frac{1}{4\pi} zndAdt \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta sen\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} re^{-r/\lambda} dr. \frac{1}{\frac{1}{4}zn\lambda dAdt}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta sen\theta d\theta \int_0^{\infty} re^{-r/\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\frac{1}{3}\lambda^2 = \frac{2}{3}\lambda$$

$$\overline{y} = \frac{2}{3}\lambda \qquad (11)$$

A una altura de $\frac{2}{3}\lambda$ sobre SS, la velocidad aumenta por $\frac{2}{3}\lambda\frac{du}{dy}$ luego la cantidad de movimiento de una molécula con esta velocidad es: (solo hay transporte en la dirección de u)

$$m(u + \frac{2}{3}\lambda\frac{du}{dy}).$$

La cantidad de movimiento neto en la dirección del flujo que pasa por unidad de tiempo y unidad de área es:

$$\frac{1}{4}nm\overline{\upsilon}(u + \frac{2}{3}\lambda\frac{du}{dy})$$

y hacia arriba será,

$$\frac{1}{4}nm\overline{\upsilon}(u - \frac{2}{3}\lambda\frac{du}{dy})$$

Aquí se introduce la hipótesis de equilibrio local $\frac{du}{dy}$ = constante en una distancia d $\sim \lambda$ (Knudsen)

$$\frac{\Delta u}{u}.\frac{L}{\lambda} << 1$$

El transporte neto de la cantidad de movimiento por unidad de área y unidad de tiempo es:

$$\frac{1}{3}nm\overline{\upsilon}\lambda\frac{du}{dy} = \frac{F}{A} = \eta\frac{du}{dy}$$

por la segunda Ley de Newton y por consiguiente,

$$\eta = \frac{1}{3} nm\overline{\upsilon}\lambda \qquad (12)$$

pero $$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot n}$$

$$\therefore \qquad \eta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{m\overline{\upsilon}}{\sigma} \qquad (13)$$

o sea que la viscosidad no depende de la presión o la densidad, solo de $\sqrt{T}$, ya que, $\overline{\upsilon} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$$\eta = \frac{1}{3\sigma} 2\sqrt{\frac{mkT}{\pi}} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma} \sqrt{mkT}$$

$$\eta = \frac{0.377}{\sigma} \sqrt{mkT}$$

que concuerda razonablemente bien con el experimento a bajas densidades.

Conductividad Térmica

Para obtener la conductividad térmica usamos el mismo razonamiento que para el caso de la viscosidad. En vez de tener dos placas con diferente velocidad, pongamos dos placas a diferentes temperaturas y sea T la temperatura en la línea SS y $\frac{dT}{dy}$ el gradiente de temperaturas. La energía media de una molécula a la temperatura T, es $\frac{f}{2}kT$, por lo tanto la energía transportada a través de SS por unidad de área y unidad de tiempo, por las moléculas cruzando de arriba hacia abajo es:

$$\frac{1}{4} n\overline{\upsilon} \frac{f}{2} k\left(T + \frac{2}{3}\lambda \frac{dT}{dy} \right)$$

y la energía transportada en sentido opuesto es:

$$\frac{1}{4} n\overline{\upsilon} \frac{f}{2} k\left(T - \frac{2}{3}\lambda \frac{dT}{dy} \right)$$

El flujo neto de energía por unidad de área y unidad de tiempo es igual a flujo neto de calor por unidad de área a través del plano, y está dado por:

$$-\frac{1}{6} n\overline{\upsilon} fk\lambda \frac{dT}{dy} = -\mathrm{K} \frac{dT}{dy}$$