APÉNDICE II, *LAS LEYES DE KEPLER Y NEWTON EN UN SOLO SISTEMA AXIOMÁTICO*

por John Auping Birch, con la asesoría de Ana Laura García Perciante

Introducción

Los dos axiomas fundamentales que se pueden destilar de la obra de Newton, a saber, la segunda ley de movimiento y la ley de gravitación universal, son muy poderosas. *De estos dos axiomas y algunas definiciones matemáticas (elipse; vector unitario; coordenadas polares) se puede deducir el núcleo de la dinámica clásica, aplicable tanto a conjuntos de partículas como sistemas solares, a saber, la primera y tercera ley de movimiento de Newton; las tres leyes de Kepler; la constancia del momento lineal; la ley de la conservación del momento angular; las definiciones de energía cinética y energía gravitacional; las relaciones entre fuerza, energía y trabajo; y la ley de la conservación de la energía total.* Aquí estamos hablando de 'un sistema axiomático' (véase introducción), en donde cada enunciado físico-matemático está lógicamente conectado con otro, porque todos se deducen, por medio de múltiples transformaciones físico-matemáticas de la base axiomática del sistema teórico

El ejercicio de este apéndice es un ejemplo de la lógica de la investigación científica: primero se definen algunos axiomas (leyes universales); después se deducen de estos axiomas y definiciones otras leyes universales y algunos enunciados básicos para regiones espacial-temporales; y, por fin, se pone a prueba el sistema axiomático *entero*, corroborando o refutando los enunciados básicos.

Sección 1. Coordenadas cartesianas planas

Un vector se define como la distancia entre dos puntos en el espacio y se calcula como la diferencia de las coordenadas de ambos puntos:

(1) $\bar{x} = \overline{OX} = (4-0, 0-0) = (4,0)$

$\bar{y} = \overline{OY} = (0-0, 3-0) = (0,3)$

En consecuencia, el vector resultante de dos vectores es la suma de ambos:

(2) $\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} = (4,0) + (0,3) = (4,3)$

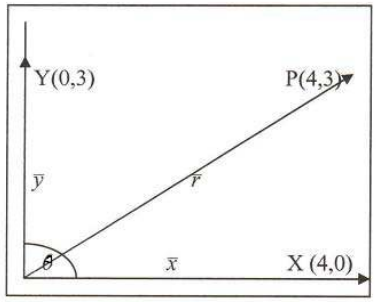
La magnitud del vector se calcula como la raíz de la suma de los cuadrados de las coordenadas a y b que lo definen, por ejemplo, en el caso de $\bar{r} = (4,3)$:

(3) $|\bar{r}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5$

La magnitud del vector se puede definir también en términos de seno y coseno:

(4) $|\bar{x}| = |\bar{r}| \cos\theta \quad \& \quad |\bar{y}| = |\bar{r}|\, sen\theta$

Imagen. Coordenadas cartesianas planas



El vector unitario se define como el vector cuya magnitud es uno:

(5) $\hat{u} = \frac{a}{|\bar{u}|}\hat{\imath} + \frac{b}{|\bar{u}|}\hat{\jmath} \rightarrow |\hat{u}| = 1$,

por ejemplo:

(6) $\hat{r} = \frac{4}{|\bar{r}|}\hat{\imath} + \frac{3}{|\bar{r}|}\hat{\jmath} = \frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath} \rightarrow$

(7) $|\hat{r}| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$

En el caso de $\hat{x}$ & $\hat{y}$:

(8) $\hat{x} = \hat{\imath}$ & $\hat{y} = \hat{\jmath}$

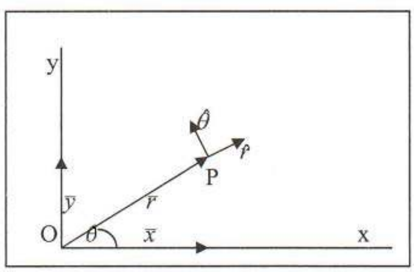
Multiplicando el vector unitario con su magnitud, obtenemos otra vez el vector original:

(9) $\bar{x} = |\bar{x}|\hat{x} = |\bar{x}|\hat{\imath}$ & $\bar{y} = |\bar{y}|\hat{y} = |\bar{y}|\hat{\jmath}$

Sección 2. Un sistema de coordenadas polares planas

El siguiente esquema orienta la exposición de esta sección.

Imagen. Coordenadas polares planas



En el caso de $\hat{r}$, obtenemos el siguiente vector unitario:

(10) $\bar{r} = |\bar{r}|\hat{r} \rightarrow \hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$

Combinando (4) & (9), obtenemos:

(11) $|\bar{x}|\hat{\imath} = |\bar{r}|\cos(\theta)\hat{\imath}$ & $|\bar{y}|\hat{\jmath} = |\bar{r}|sen(\theta)\hat{\jmath}$

Combinando (2), (9) & (11), obtenemos:
(12) $\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} = |\bar{x}|\hat{\imath} + |\bar{y}|\hat{\jmath} = |\bar{r}|\cos(\theta)\hat{\imath} + |\bar{r}|sen(\theta)\hat{\jmath}$

Combinando (10) & (12), obtenemos:
(13) $\hat{r} = \cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\hat{\jmath}$

El vector $\hat{r}$ indica la dirección de la posición. El vector plano $\hat{\theta}$ está perpendicular sobre $\hat{r}$:
(14) $\hat{\theta} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$

El vector $\hat{\theta}$ indica la dirección que va variando con el ángulo θ. Dado que $\hat{\theta}$, en este sistema móvil de coordenadas, está perpendicular sobre $\hat{r}$, se aplica el siguiente teorema del producto punto de dos vectores perpendiculares:
(15) $\hat{\theta} \bullet \hat{r} = 0$

Aplicando la (15) a (13) y (14), obtenemos:
(16) $a\cos\theta + bsen\theta = 0 \rightarrow a = \dfrac{-bsen\theta}{\cos\theta} \rightarrow a^2 = \dfrac{b^2sen^2\theta}{\cos^2\theta}$

Dado que la magnitud de un vector unitario es uno, se sigue que:
(17) $|\hat{\theta}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1$

De (16) & (17), obtenemos:
(18) $b^2(1 + \dfrac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}) = 1 \rightarrow b = \cos\theta$

De (16) & (18), obtenemos:
(19) $a = -sen\theta$

De (14), (18) & (19), obtenemos la ecuación del segundo vector polar (20), siendo la ecuación del primero la (13) y así tenemos las definiciones de los dos vectores unitarios $\hat{r}$ & $\hat{\theta}$ en un plano:
(13) $\hat{r} = \cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\hat{\jmath}$
(20) $\hat{\theta} = -sen(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$

Sección 3. La velocidad en un sistema de coordenadas polares planas

A partir de este momento, $|\bar{r}|$ se escribe como r. Cuando se escribe $\dot{r}$, se trata de la derivada de r sobre el tiempo, es decir $\dot{r} = r' = dr/dt$. Asimismo, $\dot{\hat{r}} = \hat{r}' = d\hat{r}/dt$. Se trata de la distancia entre dos puntos, por ejemplo, entre el sol y la tierra y, en el caso de una elipse (a diferencia de un círculo), r es variable. La velocidad $\bar{v}$ es la derivada sobre el tiempo del vector de posición r:
(21) $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = d\bar{r}/dt$

Combinando (10) y (21), obtenemos la velocidad $\bar{v}$ en el sistema de coordenadas polares planas:

(22) $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = (|\bar{r}|\hat{r})' = (r\hat{r})' = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$

Derivando la (13), obtenemos:

(23) $\dot{\hat{r}} = -\dot{\theta} sen(\theta)\hat{i} + \dot{\theta}\cos(\theta)\hat{j} = \dot{\theta}(-sen(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j})$

Combinando (20) & (23), obtenemos:

(24) $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$

Combinando (22) & (24), obtenemos:

(25) $\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Sección 4. La aceleración en un sistema de coordenadas polares planas

Dado que la aceleración a es la derivada de la velocidad, $\bar{v}$, que a su vez es la derivada de la posición, por definición es cierto que:

(26) $a = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$

y dado que estamos derivando sobre θ y no sobre t, obtenemos:

(27) $\dot{r} = dr/d\theta$

Combinando (25) & (26), obtenemos:

(28) $a = \dot{r}\dot{\hat{r}} + \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r(\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + \ddot{\theta}\hat{\theta})$

Derivando la (20), obtenemos:

(29) $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{i} - \dot{\theta} sen(\theta)\hat{j} = -\dot{\theta}(\cos(\theta)\hat{i} + sen(\theta)\hat{j})$

Combinando la (13) & la (20), obtenemos:

(30) $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r}$

Combinando (24), (28) & (30), obtenemos:

(31) $a = \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r[\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r}) + \ddot{\theta}\hat{\theta}] =$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

En la ecuación (31) tenemos la aceleración (por ejemplo del planeta alrededor del sol) diferenciada en sus dos componentes constitutivos, a saber, el componente radial en la dirección $\hat{r}$ y el componente tangencial en la dirección $\hat{\theta}$.

Sección 5. Se introducen dos axiomas de Newton en el sistema

La segunda ley de movimiento de Newton, según la cual la aceleración a es igual a la fuerza $\bar{F}$ que actúa sobre un cuerpo con masa m, dividida entre la masa m, es un axioma:

(32) $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{F}/m$

Combinando (31) & (32), obtenemos:
(33) $\bar{F} = m[\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} +\ (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\ ]$

La ley gravitacional universal de Newton es un axioma que no se deduce de otros principios anteriores, sino que representa una propiedad del espacio. Esta ley sostiene que la fuerza gravitacional $\bar{F}_g = \bar{F}$ equivale el producto de las masas M y m de dos cuerpos, multiplicado por una constante gravitacional G, dividido entre el cuadrado de la distancia r entre estos dos cuerpos:
(34) $\bar{F} = -\dfrac{G\,M\,m}{r^2}\hat{r}$

Según el principio newtoniano de la equivalencia, *la gravedad es equivalente a la aceleración* en su componente radial, porque en el componente tangencial, la gravedad es cero, así que podemos combinar (33) & (34):
(35) $-\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r} + 0\hat{\theta} = \bar{F} = m[\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} +\ (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\ ]$
de modo que:
(36) $-\dfrac{GM}{r^2}\hat{r} + 0\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta})\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

Por lo tanto:
(37) $-\dfrac{GM}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ &
(38) $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

Sección 6. Se comprueba la ley de la conservación del momento angular

Derivando la ecuación (12), obtenemos:
(39) $\dot{\bar{r}} = \dot{r}\cos(\theta)\hat{\imath} - r\dot{\theta}sen(\theta)\hat{\imath} + \dot{r}sen(\theta)\hat{\jmath} + r\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{\jmath}$

Por definición, el momento angular es el producto cruz del vector de posición $\bar{r}$ y el momento lineal, que a su vez, es el producto simple de la masa m y la velocidad $\bar{v}$ del objeto:
(40) $\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v} = m\bar{r} \times \bar{v} = m\bar{r} \times \dot{\bar{r}}$

Combinando (39) & (40), obtenemos:
(41) $\bar{L} = m\bar{r} \times (\dot{r}\cos(\theta)\hat{\imath} - r\dot{\theta}sen(\theta)\hat{\imath}, \dot{r}sen(\theta)\hat{\jmath} + r\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{\jmath})$

El producto cruz es:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ mr\cos\theta & mrsen\theta & 0 \\ \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}sen\theta & \dot{r}sen\theta + r\dot{\theta}\cos\theta & 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

(42) $\bar{L} = m[r\cos\theta(\dot{r}sen\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) - rsen\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}sen\theta)]\hat{k} = \bar{L} = (mr^2\dot{\theta})\hat{k}$

o, con otras palabras, $\bar{L}$ en la dirección de $\hat{k}$ es igual a:

(43) $\bar{L}_k = mr^2\dot{\theta}$ (unidades kgm^2s^{-1})

Derivando (43) sobre el tiempo, obtenemos:

(44) $d\bar{L}_k/dt = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

Ya vimos que:

(38) $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

Combinando (38) & (44), obtenemos:

(45) $\dot{\bar{L}}_k = mr(0) = 0 \rightarrow \bar{L}_k = k$

Si la derivada de $\bar{L}_k$ es cero, entonces $\bar{L}_k$ es una constante, lo que comprueba la constancia del momento angular, es decir, la constancia del movimiento inercial.

Sección 7. La órbita elíptica del planeta y el radio variable de la elipse

Con base en (43), obtenemos:

(46) $\dot{\theta} = \bar{L}_k/mr^2$

Ya vimos:

(37) $-\dfrac{GM}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

Combinando (37) & (46), obtenemos:

(47) $-\dfrac{GM}{r^2} = \ddot{r} - r(\dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2r^4}) = \ddot{r} - (\dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2r^3})$

Por lo tanto:

(48) $\ddot{r} + \dfrac{GM}{r^2} - \dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2r^3} = 0$

Hacemos ahora un cambio de variable:

(49) $r = 1/u = u^{-1}$

Combinando (48) & (49), obtenemos:

(50) $\ddot{r} - \dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2}u^3 + GMu^2 = 0$

Derivando (49), obtenemos:

(51) $\dot{r} = {dr}/{dt} = \dfrac{dr}{du}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{du^{-1}}{du}\dfrac{du}{dt} = -u^{-2}\dfrac{du}{dt}$

A su vez, la derivada de u sobre t es:

(52) ${du}/{dt} = \dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{du}{d\theta}\dot{\theta}$

Combinando (51) & (52), obtenemos:

(53) $\dot{r} = -u^{-2}\dot{\theta}\dfrac{du}{d\theta}$

Combinando (46) & (53), obtenemos:

(54) $\dot{r} = -u^{-2}(\dfrac{\bar{L}_k}{mr^2})\dfrac{du}{d\theta}$

Combinando (49) & (54), obtenemos:

(55) $\dot{r} = -\dfrac{\bar{L}_k}{m}\dfrac{du}{d\theta}$

Usamos la regla de la cadena, para derivar $\dot{r}$:

(56) $\ddot{r} = -\dfrac{\bar{L}_k}{m}\dfrac{d({du}/{d\theta})}{dt}$

Sabemos que, por definición:

(57) $\dot{\theta} = {d\theta}/{dt} \rightarrow {1}/{dt} = {\dot{\theta}}/{d\theta}$

Combinando (56) & (57), obtenemos:

(58) $\ddot{r} = -\dfrac{\bar{L}_k}{m}\dot{\theta}\dfrac{d({du}/{d\theta})}{d\theta} = -\dfrac{\bar{L}_k}{m}\dot{\theta}\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$

Combinando (46), (49) & (58), obtenemos:

(59) $\ddot{r} = -\dfrac{\bar{L}_k}{m}\dfrac{\bar{L}_k}{mr^2}\dfrac{d^2u}{d\theta^2} = -\dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2}u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$

Combinando (48), (49) & (59), obtenemos:

(60) $-\dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2}u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + GMu^2 - \dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{m^2}u^3 = 0$

Multiplicando los términos con $\dfrac{m^2}{\bar{L}_k^{\,2}u^2}$, obtenemos:

(61) $-\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + \dfrac{GMm^2}{\bar{L}_k^{\,2}} - u = 0 \qquad \rightarrow$

(62) $$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GMm^2}{\overline{L}_k^{\,2}}$$

Ésta es una ecuación diferencial no-homogénea de segundo orden, del tipo $u''+u=k$, que podemos resolver de la siguiente manera:

(63) $$\begin{aligned}&r^2+1=0\rightarrow r^2=-1\rightarrow r=\pm i\rightarrow\alpha=0\ \&\ \beta=1\\&\rightarrow u_h=c_1e^{0\theta}\cos(1\theta)+c_2e^{0\theta}sen(1\theta)=c_1\cos\theta+c_2sen\theta\end{aligned}$$

(64) $$u_p=k\rightarrow u_p{}'=0\rightarrow u_p{}''=0\rightarrow 0+k=\frac{GMm^2}{\overline{L}_k^{\,2}}$$

Sumando (63) & (64), obtenemos:

(65) $$u=u_h+u_p=c_1\cos\theta+c_2sen\theta+\frac{GMm^2}{\overline{L}_k^{\,2}}$$

Derivando (63), obtenemos:

(66) $$u_h{}'={du}/{d\theta}=-c_1sen\theta+c_2\cos\theta$$

Tomando las condiciones iniciales del planeta en el punto P, donde el ángulo $\theta=0$ y la velocidad radial también es cero ($\overline{v}=\dot{r}=0$), obtenemos, con base en (54):

(67) $$\dot{r}=-\frac{\overline{L}_k}{m}\frac{du}{d\theta}=0\rightarrow\frac{du}{d\theta}=0$$

Combinando (66) & (67), obtenemos:

(68) $$u_h{}'=\frac{du}{d\theta}=-c_1sen\theta+c_2\cos\theta=0$$

Dado que en el punto P, $\theta=0$, se sigue que:

(69) $$c_1(0)+c_2(1)=0\rightarrow c_2=0$$

Combinando (65) & (69), obtenemos:

(70) $$u=c_1\cos\theta+\frac{GMm^2}{\overline{L}_k^{\,2}}$$

Combinando (49) & (70), obtenemos:

(71) $$r=\frac{1}{c_1\cos\theta+({GMm^2}/{\overline{L}_k^{\,2}})}=\frac{{\overline{L}_k^{\,2}}/{GMm^2}}{c_1\cos\theta({\overline{L}_k^{\,2}}/{GMm^2})+1}$$

Hacemos sustituciones de dos variables, a saber, p & e:

(72) $$p={\overline{L}_k^{\,2}}/{GMm^2}\Rightarrow\left|\overline{L}_k=m\sqrt{pGM}\right|$$

(73) $e = \dfrac{c_1 L_k^{\ 2}}{GMm^2}$

De (72) & (73) se deduce que:

(74) $c_1 = \dfrac{e}{p}$

De las ecuaciones (2), (3) & (11) del Apéndice I y la ecuación (74) se puede deducir el valor de la constante c_1 en términos de del semi-eje mayor a, el semi-eje menor b y la distancia c del centro de la elipse a cualquier de los dos focos, a saber:

(75) $c_1 = \dfrac{c}{a^2 - b^2} = \dfrac{c}{b^2}$

Con base en (71), (72) & (73), obtenemos la ecuación del radio variable de la elipse (la distancia sol-planeta) que derivamos geométricamente en la ecuación 35 del Apéndice I:

(76) $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$

En esta ecuación (76), p y e son constantes y el radio r (la distancia entre el planeta y el sol (que se ubica en uno de los focos de la elipse), varía de un mínimo de $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$, cuando $\theta = 0^0$, a $r = p$, cuando $\theta = 0.5\pi\ (= 90^0)$ o $\theta = 1.5\pi\ (= 270^0)$, hasta un máximo de $r_{\max} = \dfrac{p}{1-e}$, cuando $\theta = \pi (= 180^0)$, como ya vimos en las ecuaciones 13 y 14.del Apéndice I:

Para e (la excentricidad, véase Apéndice I), existen cuatro posibilidades:

(77) $e = 0 \rightarrow r = p \rightarrow$ la órbita del objeto es un círculo $(a = b)$;

(78) $0 < e < 1 \rightarrow r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta} \rightarrow$ la órbita es una elipse (el caso de la órbita de un planeta alrededor del sol)

(79) $e = 1 \rightarrow r = \dfrac{p}{1 + \cos\theta} \rightarrow$ la órbita es parabólica (si θ tiende a 180^0, $\cos\theta$ tiende a -1, y r tiende a infinito)

(80) $e > 1 \rightarrow r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta} \rightarrow$ la órbita es hiperbólica.

Sección 8. Se introduce la energía en la ecuación de la órbita elíptica del planeta

De las ecuaciones (26) & (32) se deduce que la fuerza $\overline{F}$ equivale el producto de masa m y la derivada de la velocidad (la aceleración):

(81) $\overline{F} = m\dot{\overline{v}}$

Multiplicando escalarmente ambos términos por $\overline{v}$, obtenemos:

(82) $\overline{v} \cdot \overline{F} = m\overline{v} \cdot \dot{\overline{v}}$

Integrando ambos lados en la variable temporal t, en un plazo que va de t_0 a t_f y tomando en cuenta que m es una constante, obtenemos:

(83) $\int_{t_0}^{t_f} \bar{F} \cdot \bar{v} dt = m \int_{t_0}^{t_f} \bar{v} \cdot \dot{\bar{v}} dt$

Para *la integral del lado derecho*, hacemos un cambio de variable, a saber, $\bar{u} = \bar{v}$ y $d\bar{u} = \dot{\bar{v}} dt$ y por la regla de la cadena, obtenemos:

(84) $m \int_{t_0}^{t_f} \bar{v} \cdot \dot{\bar{v}} dt = m \int_{u_0}^{u_f} \bar{u} \cdot d\bar{u} = m \frac{|\bar{u}_f|^2}{2} - m \frac{|\bar{u}_0|^2}{2} = \frac{1}{2} m |\bar{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\bar{v}_0|^2$

Se define *la energía cinética* como $K = \frac{1}{2} m v^2$ (en donde, según lo indicado al principio de la tercera sección, $v = |\bar{v}|$), de modo que la integral del lado derecho de la ecuación (83) se escribe como:

(85) $m \int_{t_0}^{t_f} \bar{v} \cdot \dot{\bar{v}} dt = \Delta K = K_f - K_0$

Para *la integral del lado izquierdo* de la ecuación (83) hacemos otro cambio de variable, a saber, $\bar{u} = \bar{r}$ y $d\bar{u} = \dot{\bar{r}} dt = \bar{v} dt$, en donde $\bar{r}$ es el vector de posición del objeto. Por la regla de la cadena se obtiene la ecuación del trabajo W, que se define como la integral de la fuerza, a lo largo de una trayectoria

(86) $\int_{t_0}^{t_f} \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \int_{u_0}^{u_f} \bar{F} \cdot d\bar{u} = \int_{r_0}^{r_f} \bar{F} \cdot d\bar{r} = W$

Combinando (84), (85) & (86), obtenemos:

(87) $\Delta K = \frac{1}{2} m |\bar{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\bar{v}_0|^2 = \int_{r_0}^{r_f} \bar{F} \cdot dr = W$

lo que comprueba que $W = \Delta K$.

Dado que $\bar{r}_0$ y $\bar{r}_f$ son los vectores de posición del cuerpo con masa m, la ecuación (87) nos indica que el trabajo W realizado por una fuerza $\bar{F}$ que actúa sobre un cuerpo, inicialmente en reposo (o en movimiento inercial) para desplazarlo de la posición $\bar{r}_0$ a la $\bar{r}_f$, es igual a la variación de la energía cinética ΔK de este cuerpo en el tiempo que va de t_0 a t_f.

En el caso de la atracción gravitacional entre dos cuerpos, la fuerza $\bar{F}$ es una fuerza gravitacional, que se define según el axioma de *la gravitación universal de Newton,* que ya se ha definido arriba:

(34) $\bar{F} = \frac{-GMm}{r^2} \hat{r}$

Al sustituir la (34) en la (87), obtenemos:

(88) $W = \frac{1}{2}m|\bar{v}_f|^2 - \frac{1}{2}m|\bar{v}_0|^2 = \int_{r_0}^{r_f} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ (el punto indica producto punto)

$$W = -GMm\int_{r_0}^{r_f} r^{-2}\hat{r} \cdot d\bar{r} = -GMm\int_{r_0}^{r_f} r^{-2}dr =$$

$$W = -GMm\int_{r_0}^{r_f} -\frac{d}{dr}r^{-1}dr = -(-GMm)\int_{r_0}^{r_f} d\frac{1}{r} = -\frac{-GMm}{r_f} + \frac{-GMm}{r_0}$$

El término de la derecha es la *energía potencial gravitacional como función de la distancia:* $U_g(r)$:

(89) $U_g = \frac{-GMm}{r}$

Nótese que el procedimiento de la ecuación (88) & (89) se puede llevar a cabo para cualquier fuerza que tenga antiderivada. A dicha antiderivada se le llama energía potencial y a este tipo de fuerza, fuerza conservativa. Esta energía potencial puede ser gravitacional, o elástica o eléctrica u otra forma de energía. En este caso, hemos definido, a partir de la segunda ley de movimiento de Newton, la energía cinética K, el trabajo W y la energía potencial gravitacional U_g. Por definición, la energía total E es equivalente a la suma de la energía cinética K y la energía gravitacional U_g:

(90) $E = K + U_g$

Ya vimos, que la energía cinética se define como:

(91) $K = \frac{1}{2}mv^2$ (en donde $v = |\bar{v}|$)

Reescribiendo los términos de la ecuación (88), obtenemos:

(92) $\frac{1}{2}mv_f{}^2 + \frac{-GMm}{r_f} = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + \frac{-GMm}{r_0}$

Tomando en cuenta las definiciones (89) y (91), simplificamos la ecuación (92):

(93) $K_f + U_f = K_0 + U_0$

Simplificando todavía más, con base en la ecuación (90), obtenemos *la ley de la conservación de la energía total:*

(94) $E_f = E_0$

La ley de la conservación de la energía total nos dice que, después de la actuación de una fuerza conservativa (en nuestro caso gravitacional) $\bar{F}$ sobre un cuerpo con masa m en reposo o movimiento inercial, la energía total del cuerpo no cambia. La energía E_0 del cuerpo en el momento t_0, con el vector de posición r_0, es igual a la energía total E_f del mismo cuerpo, en el momento t_f, en el vector de posición r_f. Claro está, que ha habido un intercambio de energía entre la energía cinética K del cuerpo y su energía potencial U_g, debido al trabajo W realizado por la fuerza $\overline{F}$, *de modo que ha aumentado la energía cinética K del cuerpo y ha disminuido su energía potencial* U_g, o vice-versa, ha disminuido la energía cinética y aumentado la energía potencial, así como se desprende de la siguiente ecuación, deducida de la (93):

(95) $W = K_f - K_0 = U_0 - U_f$

En el caso del Sol y un planeta que gira alrededor del Sol (ubicado en el foco F_1 de la órbita elíptica), la energía potencial es la *gravitacional*. En el punto P_0 (Véase dibujo al inicio del apéndice I), la energía potencial gravitacional U_g está en su valor máximo y la energía cinética K es cero $(E = U_{\max})$. En cambio, en el punto P_2, la energía gravitacional potencial está en su valor mínimo (porque el planeta se encuentra a su máxima distancia del Sol) y la energía cinética está en su valor máximo $(E = U_{\min} + K_{\max})$, de modo que de P_0 a P_2, va aumentando la energía cinética y disminuyendo la energía potencial gravitacional y, vice-versa, de P_2 a P_0, va aumentado la energía potencial gravitacional y disminuyendo la energía cinética.

Dado que:

(25) $\overline{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

se sigue que:

(96) $v = |\overline{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$ &

(97) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

Y dado también que:

(43) $\overline{L}_k = mr^2\dot{\theta}$

se sigue que:

(46) $\dot{\theta} = \overline{L}_k / mr^2$

Combinando (46) & (97), obtenemos:

(98) $v^2 = \dot{r}^2 + \dfrac{\overline{L}_k^{\,2}}{m^2 r^2}$

Combinando (91) & (98), obtenemos:

(99) $K = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\dfrac{\overline{L}_k^{\,2}}{mr^2}$

Combinando (90) & (99), obtenemos:

(100) $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\overline{L_k}^2}{mr^2} + U_g$

Arriba vimos la ley gravitacional universal de Newton:

(34) $\overline{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

Por definición, la fuerza gravitacional $\overline{F}_g$ es la negativa de la antiderivada sobre r de la energía gravitacional U_g y, por lo tanto, la energía gravitacional es la negativa de la integral de la fuerza gravitacional:

(101) $U_g = -\int(-\frac{GMm}{r^2}).dr = GMm\int r^{-2}.dr = \frac{-GMm}{r}$

Combinando (100) & (101), obtenemos:

(102) $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\overline{L_k}^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}$

Es importante señalar que en órbitas cerradas, como círculos o elipses, el tercer término $\frac{GMm}{r}$ suma más que los dos primeros, de modo que, en tales casos, la energía $E < 0$. Escogemos las condiciones iniciales de (67), a saber, $\theta = 0$ y $\overline{v} = \dot{r} = 0$, en el punto P_0.. Si $\theta = 0$, entonces, $\cos\theta = 1$. Estas condiciones iniciales permiten re-escribir las ecuaciones (102) & (76), para llegar a (103):

(103) $E = \frac{1}{2}\frac{L_k^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}$

En la ecuación (13) del Apéndice I encontramos la (104).

(104) $r = \frac{p}{e+1} \rightarrow r^2 = \frac{p^2}{(e+1)^2} \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{(e+1)^2}{p^2}$

Ahora sustituimos (104) en (103) para obtener (105):

(105) $E = \frac{1}{2}\frac{L_k^2(e+1)^2}{mp^2} - \frac{GMm(e+1)}{p}$

Ahora toca definir la excentricidad e en términos de energía E y momento angular L_k. Para lograr esto, hemos de combinar las ecuaciones (72) & (105), sustituyendo p por $\frac{L_k^2}{GMm^2} \rightarrow$

(106) $E = \frac{\frac{1}{2}(e+1)^2G^2M^2m^3 - G^2M^2m^3(e+1)}{L_k^2} \rightarrow$

(107) $E = \frac{G^2M^2m^3(e+1)(\frac{1}{2}e + \frac{1}{2} - 1)}{L_k^2} \rightarrow$

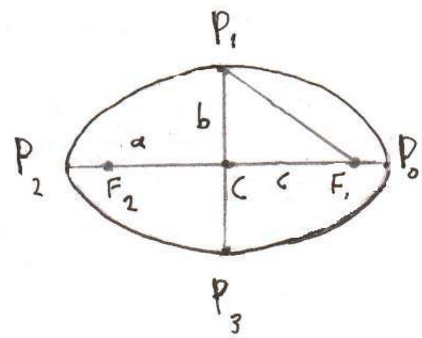
(108) $E = \dfrac{G^2 M^2 m^3 (e^2 - 1)}{2L_k^{\,2}} \rightarrow$

(109) $(e^2 - 1) = \dfrac{2EL_k^{\,2}}{G^2 M^2 m^3} \rightarrow$

Ahora podemos definir la excentricidad de la órbita elíptica del planeta en términos de la energía total E y el momento angular $\overline{L}_k$, lo que era el propósito de esta sección:

(110) $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EL_k^{\,2}}{G^2 M^2 m^3}} \rightarrow e^2 = 1 + \dfrac{2E\overline{L}_k^{\,2}}{G^2 M^2 m^3}$

Sección 9. Se introduce la geometría de la elipse



En una elipse, la excentricidad e se define en términos del semieje mayor a, el semieje menor b y la distancia c del centro C de la elipse hasta cada uno de focos[1707]

(111) $e = \sqrt{1 - b^2/a^2} = c/a$

de modo que:

(112) $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - c^2$

Ahora bien, recordemos que:

(72) $p = \overline{L}_k^{\,2} / GMm^2$ y la excentricidad e es:

(73) $e = \dfrac{c_1 \overline{L}_k^{\,2}}{GMm^2}$ &

(76) $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$

Ya vimos en el Apéndice I, ecuaciones (13) y (14) que:

[1707] Véase Apéndice I, ecuaciones (2), (3) & (5)

(113) $r_{\max} = \dfrac{p}{1-e}$

(114) $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$

Como se puede observar en el dibujo, por definición, el semieje mayor a es igual a:

(115) $a = \dfrac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \dfrac{p(1+e) + p(1-e)}{2(1-e^2)} = \dfrac{p}{(1-e^2)}$

de modo que (Apéndice I, ecuación 12):

(116) $a = \dfrac{p}{1-e^2} \rightarrow a^2 = \dfrac{p^2}{(1-e^2)^2}$

Con base en (72), (110) & (116), obtenemos a en términos de masa y energía total:

(117) $a^2 = (-\dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{2mE})(-\dfrac{G^2M^2m^3}{2E\bar{L}_k^{\,2}}) = \dfrac{G^2M^2m^2}{4E^2}$ de modo que:

(118) $a = \pm\dfrac{GMm}{2E}$

Dado que estamos hablando de una órbita elíptica, es decir, una órbita cerrada, la energía total es negativa ($e < 1$ y $E < 0$: véase arriba las ecuaciones (78) & (108), de modo que hemos de optar, en la ecuación (118) por el cociente con signo negativo para que el semieje mayor, a, tenga un valor positivo. Con base en la ecuación (118) podemos definir la energía total del sistema de dos cuerpos en términos de masa y semieje mayor:

(119) $E = -\dfrac{GMm}{2a}$ (recordemos que $E < 0$):

Con base en (110), (112), (116) & (119), podemos definir el semieje menor en términos de masa, energía y momento angular y también en términos de masa, momento angular y semieje mayor:

(120) $b^2 = -\dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{2mE} \rightarrow b^2 = \dfrac{\bar{L}_k^{\,2}}{GMm^2}a$

Sección 10. Las leyes de Kepler en su forma aproximada

Recordemos (43):

(43) $\bar{L}_k = mr^2\dot{\theta} = mr^2\dfrac{d\theta}{dt}$

de modo que:

(121) $d\theta = \dfrac{\bar{L}_k}{mr^2}dt$

Veamos ahora el área recorrida por el planeta en un tiempo determinado. En una fracción mínima del tiempo, dt, el planeta recorre una distancia mínima ds, de modo que la superficie de la elipse cubierta en el tiempo dt es el área dA:

(122) $dA = \frac{r_1(ds)}{2}$

Por definición, el vector resultante r_2 de dos vectores, r_1 y ds, es la suma de estos vectores:

(123) $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{ds} \rightarrow |\bar{r}_2| = |\bar{r}_1| + |\bar{ds}| \rightarrow r_2 = r_1 + ds$

Trígono-métricamente, el seno del incremento del ángulo $d\theta$ equivale:

(124) $sen(d\theta) = ds / r_2 = ds / (r_1 + ds)$

de modo que:

(125) $ds = (r_1 + ds) sen(d\theta)$

Combinando (122) & (125), obtenemos:

(126) $dA = r_1(r_1 + ds) sen(d\theta) / 2$

Sabemos que para ángulos muy pequeños:

(127) $sen(d\theta) \cong d\theta$

Combinando (126) & (127), obtenemos:

(128) $dA \cong [r_1^2 + r_1(ds)] d\theta / 2$

y ya que ds es casi cero, se sigue que:

(129) $dA \cong r_1^2 (d\theta) / 2$

Combinando (121) & (129), y dado que $\bar{L}_k$ y m son constantes, obtenemos *la segunda ley de Kepler, que afirma que en fracciones de tiempo iguales el planeta barre áreas iguales de la elipse:*

(130) $dA \cong \frac{\bar{L}_k}{2m} dt = k(dt)$

Ahora se procede para deducir la tercera ley de Kepler, en su forma aproximada. De (130) se deduce que:

(131) $dt = \frac{2m(dA)}{\bar{L}_k}$

Para que el planeta recorra toda la órbita elíptica alrededor del sol, en T segundos, requiere de un período P:

(132) $P = \int_0^T dt$

Combinando (131) & (132), obtenemos.

(133) $P = \int_0^T dt = \int_0^A \frac{2m}{L_k} dA = \frac{2m}{L_k} \int_0^A dA = \frac{2mA}{L_k}$

Dado que el área de una elipse es:

(134) $A = \pi a b$

se sigue, combinando (133) & (134), que:

(135) $P^2 = \frac{4m^2\pi^2 a^2 b^2}{L^2{}_k}$

Combinando (120) & (135), obtenemos *la tercera ley de Kepler, en su forma newtoniana-aproximada, la cual afirma que el cuadrado del período* P*, que toma un planeta para recorrer su órbita elíptica alrededor del sol, es proporcional al cubo del semieje mayor* a *de la elipse:*

(136) $P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$

Dado que en el sistema solar, la constante π, la constante gravitacional G, y la masa del sol M juntas constituyen una constante k que resulta ser independiente de la masa m del planeta, podemos re-escribir la ecuación (136) como *la tercera ley de Kepler*:

(137) $P^2 = ka^3$

Sección 11.- Velocidad circular y velocidad de escape[1708]

En el caso de un objeto atrayente masivo con masa m_1 y objeto atraído con masa relativo pequeño m_2, se puede prescindir de la masa m_2 y la órbita se vuelve circular y la tercera ley de Kepler es la simplificada:

(136) $P^2 \cong \frac{4\pi^2}{Gm_1} a^3$

En este caso, podemos sustituir el semieje mayor a por el radio r. La tercera ley de Kepler se puede, entonces, reescribir como sigue:

(138) $P^2 \cong \frac{4\pi^2}{Gm_1} r^3$

[1708] Hannu Karttunen y otros, *Fundamental Astronomy* (2003): 121, ecuaciones 6.41 y 6.42
John Hawley & Katherine Holcomb, *Foundations of Modern Cosmology*, (1998): 231, 295

Por definición, la velocidad circular del objeto con masa m_2 con órbita circular con radio r y un período P de una revolución, alrededor de otro objeto, es la siguiente:

(139) $v_c = \frac{2\pi r}{P}$

Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos la velocidad circular del objeto con masa m_1:

(140) $v_c \cong \sqrt{\frac{Gm_1}{r}}$ (dimensión: ms^{-1})

Supongamos que el objeto con masa m_2 desea escapar, con velocidad de escape v_e, de la atracción gravitacional del objeto masivo con masa m_1, de tal manera que a una distancia infinita, la energía cinética y la energía gravitacional potencial sean cero. En tal caso límite, la energía total es:

(141) $E = K + U_g = \frac{1}{2}m_2 v_e^{\ 2} + \frac{-Gm_1m_2}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v_e^{\ 2} = \frac{Gm_1}{r} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2Gm_1}{r}}$

Combinando las ecuaciones de la velocidad circular y la velocidad de escape, obtenemos:

(142) $v_e \cong v_c\sqrt{2}$ (nota 30)

Sección 12. De la segunda ley de Newton se deduce la primera y la tercera

En general, si tenemos n partículas u objetos en un sistema, la fuerza total $\overline{F_T}$ del sistema es la suma de las fuerzas externas e internas:

(143) $\overline{F_T} = \sum_{i=1}^{n}\overline{F_{ex}} + \sum_{i=1}^{n}\overline{F_{in}}$

Según la tercera ley de Newton, acción es reacción. Esta ley se deriva de la segunda, porque si un cuerpo en movimiento uniforme choca con otro cuerpo en reposo –por ejemplo, en el caso de dos bolas con idéntica masa en un juego de billar-, los dos se aceleran, pero de tal manera, que el primero sufre una aceleración negativa (se para) y el segundo una aceleración positiva (empieza a moverse), es decir:

(32) $\overline{F} = ma$

de modo que:

(144) $\overline{F}_{(1,2)} = ma = -\overline{F}_{(2,1)} = -ma \quad \Rightarrow \quad \overline{F_{in}}(1,2) = -\overline{F_{in}}(2,1)$

De (144) se deduce que:

(145) $\sum_{i=1}^{n}\overline{F_{in}} = 0$

De (143) & (145) se deduce que:

(146) $\overline{F_T} = \sum_{i=1}^{n}\overline{F_{ex}}$

Ahora bien, según la segunda ley de Newton, si las partículas u objetos de un sistema seguirán en estado de movimiento uniforme, *porque la fuerza externa que se les explica es cero*, el cambio en la cantidad total de movimiento o momento lineal $m\overline{v}$ también es cero, de tal manera que:

$$(147)\quad \overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ex} = \frac{d}{dt} m\overline{v} = m\frac{d}{dt}\overline{v} + \overline{v}\frac{d}{dt}m = 0$$

Ahora bien, dado que la masa m de las partículas u objetos es constante, la derivada de su masa es cero:

$$(148)\quad \frac{d}{dt}m = \Delta m = 0$$

Combinando (147) & (148), se obtiene la primera ley de Newton que afirma que *la cantidad total de movimiento o momento lineal $m\overline{v}$ de un cuerpo es constante (k), cuando la fuerza externa que se le aplica es cero:*

$$(149)\quad \overline{F}_T = m\frac{d}{dt}\overline{v} = m\overline{a} = 0 \Rightarrow \quad m\overline{v} = k$$

Obviamente, si el cambio de masa del objeto *no* es cero, como, por ejemplo, en el caso de un cohete que acelera lo suficiente para escapar de la atracción gravitacional de la tierra, quemando su combustible, su aceleración –por el hecho que su masa se va reduciendo- será mayor que en el caso de un objeto con la misma masa inicial, pero constante. Si aplicamos en ambos casos la misma fuerza $\overline{F}$, en el caso del cohete, se añade un factor que es mayor que cero (siendo cero en el caso de un objeto con masa constante): $(-\frac{\overline{v}}{m}\frac{dm}{dt}) > 0$.

$$(150)\quad \overline{F} = m\overline{a} + \overline{v}\frac{dm}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} - \frac{\overline{v}}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{-GM}{r^2} - \frac{\overline{v}}{m}\frac{dm}{dt}$$

Sección 13. Las leyes de Kepler deducidas de las leyes de Newton en su forma exacta

Para deducir la tercera ley de Kepler en su forma exacta, partimos del sistema de partículas u objetos de la sección 12. El momento lineal de un sistema de n partículas u objetos es la suma de los momentos lineales de cada partícula u objeto en particular, de modo que podemos re-escribir la ecuación (142) como sigue:

$$(151)\quad \overline{F}_T = \frac{d}{dt}(m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 + ...m_n\overline{v}_n)$$

Multipliquemos ahora la ecuación (151) con $\frac{M_T}{M_T}$, en donde M_T es la masa total del sistema, es decir, la suma de las masas de todas las partículas u objetos del sistema:

$$(152)\quad \overline{F}_T = M_T\frac{d}{dt}(\frac{m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 + ... + m_n\overline{v}_n}{M_T})$$

Por definición, la aceleración del centro de masa del sistema, a_{cm}, equivale:

(153) $a_{cm} = \frac{d}{dt}(\frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + ... + m_n\bar{v}_n}{M_T})$

Combinando (152) & (153), obtenemos la ecuación de la fuerza total del sistema, comparable con la ecuación (145):
(154) $\bar{F}_T = M_T a_{cm}$

Dado que la aceleración es la derivada de la velocidad, obtenemos, con base en (148):
(155) $\bar{v}_{cm} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + ... + m_n\bar{v}_n}{M_T}$

Y dado que la velocidad es la derivada de la posición, y la posición la integral de la velocidad, obtenemos, con base en (116), el vector del centro de masa r_{cm}:

(156) $\bar{r}_{cm} = \int\bar{v}_{cm} = \frac{1}{M_T}\int(m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + ... + m_n\bar{v}_n)dt =$

$= \frac{1}{M_T}(m_1\int\bar{v}_1 dt + m_2\int\bar{v}_2 dt + ... + m_n\int\bar{v}_n dt) = = \frac{1}{M_T}(m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + ... + m_n\bar{r}_n)$

Se deduce de (151) que para un sistema de dos cuerpos ($n = 2$) con masas m_1 y m_2, el vector del centro de masa $\bar{r}_{cm}$ es:

(157) $\bar{r}_{cm} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{M_T}$

Dado que por definición, la masa total es:
(158) $M_T = m_1 + m_2 + ... + m_n$

se sigue, con base en (157) & (158), que:
(159) $\bar{r}_{cm} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2}$

Si nos paramos en el centro de masa, en un sistema de coordenadas en donde cm es el origen, de tal manera que los dos cuerpos se mueven hacia lados opuestos, se sigue que:
(160) $\bar{r}_{cm} = 0$

Combinando (159) & (160), obtenemos:
(161) $\frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$

De (161) se desprende que:
(162) $m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = 0$

De (162) se desprende que:

(163) $\bar{r}_1 = -\dfrac{m_2\bar{r}_2}{m_1}$

Sabemos que el vector de la distancia entre los cuerpos m_1 y m_2 se define como su diferencia:

(164) $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

de modo que:

(165) $\bar{r}_2 = \bar{r} + \bar{r}_1$

Combinando (162) & (165), obtenemos:

(166) $\bar{r}_2 = \bar{r} - \dfrac{m_2\bar{r}_2}{m_1}$

De (166) se desprende que:

(167) $\bar{r} = \bar{r}_2(1 + \dfrac{m_2}{m_1})$

De (167) se desprende que:

(168) $\bar{r} = \bar{r}_2(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1})$

de modo que:

(169) $\bar{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{r}$

Combinando (163) & (169) obtenemos:

(170) $\bar{r}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{r}$

De (170) se desprende que:

(171) $\ddot{r}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{r}$

Según la segunda ley de Newton:

(172) $\bar{F} = m_1 a = m_1\ddot{r}_1 = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$

De (172) se desprende que:

(173) $\ddot{r}_1 = \dfrac{Gm_2}{r^2}\hat{r}$

De (171) & (173) se desprende que la aceleración a_{cm} de la masa reducida μ en el centro de masa cm, es:

(174) $a_{cm} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}\hat{r}$

Se puede llegar al mismo resultado siguiendo el camino de $\ddot{\vec{r}}_2$. Según la segunda ley de Newton:

(175) $\overline{F} = m_2 a = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

De (175) se desprende que:

(176) $\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{r}$

De (169) se desprende que:

(177) $\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}}$

Combinando (176) & (177), obtenemos el mismo resultado que consta en la ecuación (174), a saber la aceleración de la masa reducida en el centro de masa:

(174) $a_{cm} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}\hat{r}$

Ya que hemos derivado la aceleración a_{cm} de la masa reducida μ en el centro de masa cm. Ahora toca deducir la masa reducida μ. De la segunda ley de Newton que consta en la ecuación (32) se deduce que:

(32) $\overline{F} = \mu a_{cm}$

Recordemos también la ley gravitacional universal de Newton:

(34) $\overline{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

Sustituyendo (174) en (32), obtenemos:

(178) $\overline{F} = \mu(-\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2})\hat{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

De (178) se desprende la definición de la masa reducida μ en el centro de masa:

(179) $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Recordemos que, en su forma aproximada, la tercera ley de Kepler es la siguiente:

(136) $P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 = ka^3$

Con base en lo anterior, podemos dar la versión exacta de la tercera ley de Kepler, sustituyendo la masa del sol M por la masa total M_T, la cual equivale la suma de las masas m_1 y m_2 de ambos cuerpos, por ejemplo, del Sol y de la Tierra, o de la Tierra y la Luna:

$$(180) \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Para concluir, presento la siguiente síntesis que nos presenta las variables en el sistema aproximado, que vimos en las secciones 1 a 10, y en el sistema exacto, que vimos en las secciones 11 y 12. En el siguiente esquema la masa del sol es m_1 y la masa del planeta, m_2. Dado que la masa del planeta es tan pequeña, en comparación con la masa del sol, las aproximaciones de Kepler son bastante buenas. Pero, en otro sistema de dos cuerpos, con masas menos diferentes, como, por ejemplo, la tierra y la luna, estas aproximaciones ya no sirven. Hemos de tomar nota que en la ecuación (D) el símbolo a representa la aceleración, y en la ecuación (E) y (F), es el semieje mayor de la órbita elíptica del planeta.

SÍNTESIS

	Sistema aproximado	**Sistema exacto**
Fuerza gravitacional	$\overline{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$	$\overline{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$
Masa total	$M_T \cong m_1$ (masa sol)	$M_T = m_1 + m_2$ (masa Sol más masa planeta)
Masa acelerada	$m = \frac{m_1m_2}{M_T} \cong m_2$	$\mu = \frac{m_1m_2}{M_T} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$
Aceleración a **es aceleración**	$a = \frac{\overline{F}}{m} = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{r}$	$a_{cm} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}\hat{r}$
Tercera ley de Kepler P **es período revolución**	$P^2 \cong \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_1}$	$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$
Tercera ley de Kepler a **es semieje mayor**	$a^3 = P^2 \frac{Gm_1}{4\pi^2}$	$a^3 = P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$

Sección 14. La evidencia empírica

De las dos ecuaciones de (F) se desprende que el cubo del semieje mayor a, según la ecuación exacta es $\frac{m_1 + m_2}{m_1}$ veces más grande que el cubo del semieje mayor según la ecuación aproximada. Esta diferencia es mínima, como se puede comprobar si se toma en cuenta que la masa del sol (m_1) es 27 millones de veces la masa de la tierra (m_2). Por lo tanto, el cubo del semieje mayor, a^3, en el caso de la ecuación exacta es 1.000,000,037 mayor que en el caso de la ecuación aproximada, lo que implica que el semieje mayor a en el primer caso es 1.000,000,012 mayor que en el segundo caso.

¿De cuántos kilómetros estamos hablando? El sol está a una distancia promedio de 149.6 millones de kilómetros de la tierra. En el caso de la órbita elíptica de la tierra, el cociente del semieje menor y el semieje mayor es 0.99986. De estos dos datos se deduce que el semieje mayor a mide 149,610,473 km. y el semieje menor b, 149,589,527 km. La diferencia entre el semieje mayor exacto y el aproximado es, entonces, 1.000,000,012*149,610,473 km, es decir, menos de dos kilómetros. Era imposible que Johann Kepler, con las observaciones relativamente crudas de Tycho Brahe pudiera constatar este error mínimo.

De hecho es un tributo a los logros científicos de Brahe y Kepler, que éste, con las observaciones de aquél, pudo constatar que la órbita de la tierra es una elipse y no un círculo. En el caso de un círculo perfecto, el cociente del semieje menor y el semieje mayor es uno. En el caso de la órbita elíptica de la tierra, como ya vimos, este cociente es 0.99986. La diferencia entre el radio de la órbita circular y el semieje mayor o semieje menor de la órbita elíptica, es, entonces, un poco más de 10,000 kilómetros.

En conclusión, las observaciones de Tycho Brahe eran suficientemente exactas para que Kepler pudiera refutar la hipótesis de una órbita circular de Copérnico, y corroborar su ecuación aproximada de una órbita elíptica, pero no pudieron diferenciar entre dos órbitas elípticas con esta diferencia mínima. Solamente la tecnología moderna es capaz de semejante hazaña.

Esto comprueba que la decisión sobre la diferencia entre dos hipótesis, que teóricamente son muy diferentes –como la de Kepler y la de Newton-, pero cuyos predicciones empíricos son apenas distinguibles, muchas veces debe esperar el desarrollo de tecnología más poderosa y precisa antes de que pueda tomarse.